DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2012.12.002

第 34 卷第 12 期 西南大学学报(自然科学版) 2012年12月
Vol. 34 No. 12 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Dec. 2012

文章编号: 1673-9868(2012)12-0092-05

一个包含 Smarandache 对偶函数的方程①

陈 斌

渭南师范学院 数学系, 陕西 渭南 714000

摘要: 利用初等数论及组合方法讨论了一个包含 Smarandache 对偶函数的方程 $\sum_{d|n}\frac{1}{S_*(d)}=3\Omega(n)$ 的可解性. 得到了其所有正整数解的具体形式, 即方程所有奇数解为 $n=p^3q^5$ (p,q 为奇素数), 所有偶数解为 $n=2^8\cdot 3^{114}$, $n=2^{10}\cdot 3^{36}$, $n=2^{16}\cdot 3^{18}$, $n=2^\alpha p^2$, $n=2pqr$ ($\alpha>1$, p,q,r 为大于 3 的奇素数).

关 键 词: Smarandache 对偶函数; Ω 函数; 函数方程; 整数解

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A

著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为使得 $n\mid m!$ 的最小的正整数 m. 即 $S(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m!\}$[1-3]. 关于函数 $S(n)$ 的算术性质参见文献[4-10]. 文献[7]引入了 Smarandache 函数 $S(n)$ 的对偶函数 $S_*(n)$ 如下: 对于任意正整数 n, $S_*(n)$ 定义为使得 $m!\mid n$ 的最大的正整数 m, 即有 $S_*(n)=\max\{m: m\in\mathbf{N}, m!\mid n\}$. 关于 $S_*(n)$ 的算术性质参见文献[11-16]. 文献[11]研究了 $S_*(n)$ 的函数方程 $\sum_{d|n}SL^*(d)=\sum_{d|n}S_*(d)$ 的可解性, 并得到了一个有趣的结论: 若

$$A=\{n: \sum_{d|n}SL^*(d)=\sum_{d|n}S_*(d),\ n\in\mathbf{N}\}$$

则对于任意的实数 s, Drichlet 级数 $f(s)=\sum_{n=1,\ n\in A}\frac{1}{n^s}$ 在 $s\leqslant 1$ 时发散, 在 $s>1$ 时收敛, 且有恒等式 $f(s)\equiv\zeta(s)\left(1-\frac{1}{12^s}\right)$, 其中 $SL^*(n)$ 为 Smarandache LCM 函数的对偶函数, $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta 函数.

设 $\Omega(n)$ 表示正整数 n 的所有素因子的个数(按重数计算), 即若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示正整数 n 的标准分解式, 则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. 本文主要研究函数方程

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S_*(d)}=3\Omega(n) \tag{1}$$

的可解性, 利用初等及组合的方法获得了方程(1)的所有正整数解.

定理 函数方程(1)的所有奇数解为 $n=p^3q^5$ (p,q 为奇素数), 所有偶数解为 $n=2^8\cdot 3^{114}$, $n=2^{10}\cdot 3^{36}$, $n=2^{16}\cdot 3^{18}$, $n=2^\alpha p^2$, $n=2pqr$ ($\alpha>1$, p,q,r 为大于 3 的奇素数).

证 显然, 由 $S_*(n)$ 和 $\Omega(n)$ 的定义知, $n=1$ 不是方程(1)的解, 下面假设 $n>1$.

(Ⅰ) 若 n 为奇数, 分情况讨论如下:

① **收稿日期:** 2011-05-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(11071194); 陕西省科技厅自然科学基金项目(2012JM1021); 陕西省教育厅自然科学学科研计划项目资助(12JK0880); 渭南师范学院科研基金项目(12YKS024).

作者简介: 陈 斌(1979-), 男, 陕西咸阳人, 讲师, 主要从事数论的研究.

① 当 $n = p^{\alpha}$（$\alpha \geqslant 1$，p 为奇素数）且满足方程(1) 时，易知 $3\Omega(n) = 3\alpha$，

$$\sum_{d|p^{\alpha}} \frac{1}{S_*(d)} = 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(p^i)} = 1 + \alpha$$

则要求 $1 + \alpha = 3\alpha$，即 $\alpha = \frac{1}{2}$，矛盾．此时方程(1) 无解．

② 当 $n = p^{\alpha}q^{\beta}$（$\alpha \geqslant 1$，$\beta \geqslant 1$，p, q 为奇素数）且满足方程(1) 时，易求得 $3\Omega(n) = 3(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d|p^{\alpha}q^{\beta}} \frac{1}{S_*(d)} = 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(p^i)} + \sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(q^i)} + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(p^iq^j)} = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta$$

可得 $1 + \alpha + \beta + \alpha\beta = 3(\alpha + \beta)$，即 $1 + \alpha\beta = 2\alpha + 2\beta$．解这个不定方程可得 $\alpha = 3$，$\beta \in 5$，即 $n = p^3q^5$（p，q 为奇素数），所以此时方程(1) 有解当且仅当 $n = p^3q^5$（p, q 为奇素数）．

③ 当 $n = p^{\alpha}q^{\beta}h^{\gamma}$（$\alpha \geqslant 1$，$\beta \geqslant 1$，$\gamma \geqslant 1$，$p, q, h$ 为奇素数）且满足方程(1) 时，易知 $3\Omega(n) = 3(\alpha+\beta+\gamma)$，

$$\sum_{d|p^{\alpha}q^{\beta}h^{\gamma}} \frac{1}{S_*(d)} =1 + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(p^i)} + \sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(q^i)} + \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{1}{S_*(h^i)} + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(p^i \cdot q^j)} +$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma} \frac{1}{S_*(p^i \cdot h^j)} + \sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma} \frac{1}{S_*(q^i \cdot h^j)} + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma} \frac{1}{S_*(p^i \cdot q^jh^k)} =$$

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma$$

故可得

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma = 3(\alpha + \beta + \gamma)$$

解以上不定方程知，在 $\alpha \geqslant 1$，$\beta \geqslant 1$，$\gamma \geqslant 1$ 时方程(1) 没有正整数解．所以此时方程(1) 无解．

同理可以证得，当 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha \geqslant 1$（$\alpha_i \geqslant 1$，$i = 1,2,\cdots,k$），$k \geqslant 4 p_i$ 为奇素数时，方程(1) 无解．

(Ⅱ) 若 n 为偶数，则可分以下情况：

④ 当 $n = 2^{\alpha}$（$\alpha \geqslant 1$）且满足方程(1) 时，易得 $3\Omega(n) = 3\alpha$，

$$\sum_{d|2^{\alpha}} \frac{1}{S_*(d)} = 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(2^i)} = 1 + \frac{\alpha}{2}$$

则有 $1 + \frac{\alpha}{2} = 3\alpha$，即 $\alpha = \frac{2}{5}$，矛盾．所以 $n = 2^{\alpha}$，$\alpha \geqslant 1$ 时方程(1) 无解．

⑤ 当 $n = 2 \cdot 3^{\alpha}$（$\alpha \geqslant 1$）且满足方程(1) 时，易得 $3\Omega(n) = 3(\alpha + 1)$，

$$\sum_{d|2\cdot 3^{\alpha}} \frac{1}{S_*(d)} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(3^i)} + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(2\cdot 3^i)} = \frac{3}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{2} + \frac{4\alpha}{3}$$

则 $\frac{3}{2} + \frac{4\alpha}{3} = 3(\alpha + 1)$，即 $\alpha =-\frac{9}{10}$，矛盾．故 $n = 2 \cdot 3^{\alpha}$，$\alpha \geqslant 1$ 时方程(1) 无解．

⑥ 当 $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$（$\alpha \geqslant 2$，$\beta \geqslant 1$）且满足方程(1) 时，易知 $3\Omega(n) = 3(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d|2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}} \frac{1}{S_*(d)} =1 + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{S_*(2^i)} + \sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(3^i)} + \sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(2\cdot 3^i)} +$$

$$\sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(2^2\cdot 3^i)} + \sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} \frac{1}{S_*(2^i\cdot 3^j)} =$$

$$1 + \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{2\beta}{3} + \frac{(\alpha-2)\beta}{4} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{5\beta}{3} + \frac{(\alpha-2)\beta}{4}$$

则有 $1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{5\beta}{3} + \frac{(\alpha-2)\beta}{4} = 3(\alpha + \beta)$，即 $(3\alpha - 22)\beta = 3\alpha - 12$ 或 $\beta = 10 + \frac{208}{3\alpha - 22}$，解之得 3 组解：$\alpha_1 = 8$，$\beta_1 = 114$；$\alpha_2 = 10$，$\beta_2 = 36$ 和 $\alpha_3 = 16$，$\beta_2 = 18$．此时方程(1) 有解当且仅当 $n = 2^8 \cdot 3^{114}$ 或 $n = 2^{10} \cdot 3^{36}$ 或 $n = 2^{16} \cdot 3^{18}$．

⑦ 当 $n = 2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}$（$\alpha \geqslant 1$，$\beta \geqslant 1$，$\gamma \geqslant 1$，$p \geqslant 5$ 为奇素数）且满足方程(1) 时，易知 $3\Omega(n) = 3(\alpha+\beta+\gamma)$，

$$\sum_{d|2^\alpha 3^\beta p^\gamma}\frac{1}{S_*(d)}=$$

$$1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p^i)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i\cdot 3^j)}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i\cdot 3^j)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(3^i\cdot p^j)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot 3^j\cdot p^k)}+$$

$$\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^3\cdot 3^j\cdot p^k)}+\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^4\cdot 3\cdot p^k)}+\sum_{i=4}^{\alpha}\sum_{j=2}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot 3^j\cdot p^k)}=$$

$$\begin{cases}1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{5}+\frac{\gamma}{5}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{6} & p=5\\ 1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{4}+\frac{\gamma}{4}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{4} & p>5\end{cases}$$

则可得

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{5}+\frac{\gamma}{5}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{6}=3(\alpha+\beta+\gamma)$$

或

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{4}+\frac{\gamma}{4}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{4}=3(\alpha+\beta+\gamma)$$

化简得

$$60+15\alpha\beta+30\alpha\gamma+72\beta\gamma+10(\alpha-3)(\beta-1)\gamma=150\alpha+110\beta+68\gamma$$

或

$$12+3\alpha\beta+5\alpha\gamma+15\beta\gamma+3(\alpha-3)(\beta-1)\gamma=30\alpha+22\beta+13\gamma$$

求解这两个不定方程，得其均在 $\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$ 时无正整数解. 故此时不存在正整数 $n=2^\alpha 3^\beta p^\gamma$($\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$p\geqslant 5$ 为奇素数)使得方程(1)有解.

同理可证得，当 $n=2^\alpha 3^\beta p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\cdots p_k^{\alpha_k}$($\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$\alpha_i\geqslant 1$，$i=4,5,\cdots,k$，$k\geqslant 4$，$p_i\geqslant 5$ 为奇素数)时，方程(1)无解.

⑧ 当 $n=2^\alpha p^\beta$($\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$p\geqslant 5$ 为奇素数)且满足方程(1)时，易得 $3\Omega(n)=3(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d|2^\alpha\cdot p^\beta}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p^j)}=1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha\beta}{2}$$

即可得 $1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha\beta}{2}=3(\alpha+\beta)$，化简得 $(\alpha-1)\beta=2\alpha-2$，解之得 $\alpha>1$，$\beta=2$，故此时方程(1)有解当且仅当 $n=2^\alpha p^2$($\alpha>1$，$p\geqslant 5$ 为奇素数).

⑨ 当 $n=2^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma$($\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$p_i\geqslant 5$ 为奇素数)且满足方程(1)时，易得 $3\Omega(n)=3(\alpha+\beta+\gamma)$，

$$\sum_{d|2^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p_2^i)}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p_3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_2^j)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_3^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p_2^i\cdot p_3^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_2^j p_3^k)}=$$

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}$$

所以可推出

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}=3(\alpha+\beta+\gamma)$$

化简有

$$(\alpha+\beta+\alpha\beta-2)\gamma=2\alpha+2\beta-\alpha\beta-1$$

解这个不定方程，知其在 $\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$ 时无正整数解．故此时方程(1) 无解．

⑩ 当 $n=2^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}p_4^{\mu}$($\alpha\geqslant 1$，$\beta\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\mu\geqslant 1$，$p_i\geqslant 5$ 为奇素数) 且满足方程(1) 时，易得 $3\Omega(n)=3(\alpha+\beta+\gamma+\mu)$，

$$\sum_{d\mid 2^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}p_4^{\mu}}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p_2^i)}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p_3^i)}+\sum_{i=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(p_4^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_2^j)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_3^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_4^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p_2^i\cdot p_3^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(p_2^i\cdot p_4^j)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(p_3^i\cdot p_4^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_2^jp_3^k)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_2^jp_4^k)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_3^jp_4^k)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(p_2^ip_3^jp_4^k)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\sum_{m=1}^{\mu}\frac{1}{S_*(2^i\cdot p_2^jp_3^kp_4^{\mu})}=$$

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\mu+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\frac{\alpha\mu}{2}+\beta\gamma+\beta\mu+\gamma\mu+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{\alpha\beta\mu}{2}+\frac{\alpha\gamma\mu}{2}+\beta\gamma\mu+\frac{\alpha\beta\gamma\mu}{2}$$

则可得

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\mu+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\frac{\alpha\mu}{2}+\beta\gamma+\beta\mu+\gamma\mu+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{\alpha\beta\mu}{2}+\frac{\alpha\gamma\mu}{2}+\beta\gamma\mu+\frac{\alpha\beta\gamma\mu}{2}=3(\alpha+\beta+\gamma+\mu)$$

化简有

$$(\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha\beta\gamma-4)\mu=5\alpha+4\beta+4\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-2\beta\gamma-\alpha\beta\gamma-2$$

解这个四元不定方程，得其唯一解 $\alpha=\beta=\gamma=\mu=1$，故此时方程(1) 有解当且仅当 $n=2p_2p_3p_4$($p_i\geqslant 5$ 为奇素数)．由计算可得，当 $n=2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ 时，$\sum\limits_{d\mid 2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\frac{1}{S_*(d)}=24$，而 $3\Omega(n)=15$，所以此时方程(1) 无解．

同理可以证得当 $n=2^{\alpha}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$($\alpha\geqslant 1$，$\alpha_i\geqslant 1$，$i=2,3,\cdots,k$，$k\geqslant 5$，$p_i\geqslant 5$ 为奇素数) 时方程(1) 无解．

综上所述，定理得证．

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems，Not Solutions [M]. Chicageo：Xiquan Publishing House，1993.

[2] 易　媛，亢小玉. Smarandache 问题研究 [M]. New-York：High American Press，2006.

[3] 潘承洞，潘承彪. 初等数论 [M]. 北京：北京大学出版社，1992.

[4] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(2)：173－176.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报，2006，49(5)：1009－1012.

[6] 李梵蓓. 一个与 Smarandache 函数有关的函数方程及其正整数解 [J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(6)：892－893.

[7] SANDOR J. On Cetain Generalizations of the Smarandache Function [J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics，1999，5(2)：41－51.

[8] SANDOR J. On a Dual of the Pseudo Smarandache Function [J]. Smarandache Notions Journal，2002，13：18－23.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[10] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New-York：Spring-Verlag，1976.

[11] 王　妤. 一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程 [J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2008，25(5)：23－27.

[12] 张爱玲．关于伪 Smarandache 函数的一个方程及其正整数解［J］．西北大学学报：自然科学版，2008，38(4)：535－536.

[13] 吴 欣．关于含伪 Smarandache 函数及其对偶函数的方程的可解性［J］．西南大学学报：自然科学版，2011，33(8)：102－105.

[14] 赵院娥．关于 Smarandache 和的均值［J］．西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：39－43.

[15] 陈 姣．一类包含 Smarandache 和函数的 Ditichlet 级数［J］．西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：39－43.

[16] 陈 斌．一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程［J］．西南大学学报：自然科学版，2012，34(2)：1－4.

An Equation Involving the Smarandache Dual Function

CHEN Bin

Department of Mathematics, Weinan Teachers University, Weinan Shaanxi 714000, China

Abstract: The elementary number theory and combinational methods are used to study the solvability of a function equation $\sum_{d|n}\frac{1}{S_*(d)}=3\Omega(n)$ which involves the Smarandache dual function. All the exact positive integer solutions are given for the equation. All the odd solutions of the equation are $n=p^3q^5$, where p,q are both odd primes; all the even solutions are $n=2^8\cdot 3^{114}$, $n=2^{10}\cdot 3^{36}$, $n=2^{16}\cdot 3^{18}$, $n=2^\alpha p^2$, and $n=2pqr$, where $\alpha>1$, p,q,r are all odd primes greater than 3.

Key words: Smarandache dual function; Ω function; function equation; integer solution

责任编辑 廖 坤